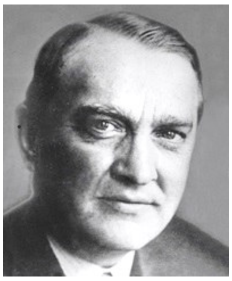
Le paradoxe de Banach-Tarski
ou la multiplication laïque des petits pains

Jean-Louis CLERC
Professeur Émérite

(30 04 2021)

Il est des résultats mathématiques qui sont déroutants parce que contraires à l'intuition. L'exemple le plus frappant que je connaisse est le paradoxe de Banach-Tarski.

Stefan Banach (1892-1945) est le fondateur de l'analyse fonctionnelle. Alfred Tarski (1901-1983) se situe à mi-chemin entre les mathématiques et la logique. En 1924, ces deux mathématiciens Polonais publient un court article [1] qui ne va pas tarder à devenir un événement dans le monde mathématique.



Stephan BANACH

Alfred TARSKI

Leur résultat est étonnamment simple à énoncer. Il faut juste connaître la notion de *partition*. Pour les mathématiciens une partition d'un ensemble est une famille de sous-ensembles (de parties si on préfère) qui est telle que tout élément de l'ensemble appartient à une et une seule des parties. La notion est travaillée dès l'école maternelle à travers des exercices proposés aux enfants : classer une famille d'objets selon leur forme ou leur couleur ; construire un puzzle à partir de petits éléments d'image. Ces exemples sont des partitions n'ayant qu'un nombre fini de parties, mais c'est suffisant pour le paradoxe de Banach-Tarski.

Précisons encore quelques expressions qui vont être utilisées. Une *boule* dans l'espace (de dimension 3) correspond plutôt bien à la notion de boule usuelle (boule de billard part exemple), et je m'abstiens d'en donner la définition mathématique. Ne pas confondre en tout cas avec la notion de sphère qui n'est que le "bord" de la boule. Enfin, *déplacer* un objet dans l'espace correspond à la notion usuelle de déplacement : on peut translater l'objet ou lui faire subir une rotation.

Banach et Tarski décrivent une opération de "découpage/recomposition" d'une boule en deux temps :
- au premier temps, on fabrique une partition de la boule en une nombre fini de parties
- au deuxième temps, on déplace séparément chaque partie.

On obtient ainsi deux boules disjointes, chacune de taille identique à celle de départ !

Banach et Tarski ne donnent ni la recette du découpage, ni les déplacements à utiliser pour chacune des parties. Ils démontrent seulement l'existence de telles opérations.

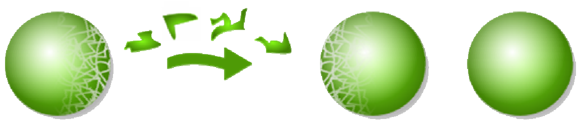
Pour faire comprendre, j'appelle cela la multiplication laïque des petits pains. Attention, il ne s'agit ni d'un miracle, ni d'un tour de magie, mais d'un résultat démontré !

Je présente la suite sous forme d'un dialogue imaginaire entre Banach (B), Tarski (T) et un jeune auditeur incrédule (A). Mes commentaires personnels figurent entre crochets.

A - Mais ce n'est pas possible ! Je pèse la boule sur une balance, disons qu'elle pèse un kilo. Je fais ma partition selon votre supposée recette. Si je pèse les morceaux sur la balance, ils pèsent au total toujours un kilo. Les déplacer ne change pas leur poids ! Or deux boules identiques à celle de départ pèsent deux kilos ! Vous êtes en train de me démontrer que 2 = 1 !

B - C'est un paradoxe, bien sûr. Dans ton objection, tu fais référence à la notion de poids. Le poids est un concept de la physique et n'a de sens que pour des objets matériels, est-ce que tu peux accepter que nous parlions de volume plutôt que de poids ? Pour un corps homogène, le poids et le volume sont équivalents : s'il s'agit par exemple d'eau, tu sais bien que son poids en kilogrammes est le même que son volume en litre (ou dm^3). Le volume a l'avantage d'être une notion géométrique, ton objection peut être reformulée en disant que deux boules ont un volume double de celui d'une boule et la contradiction apparente est la même.

A - D'accord, je ne vois pas vraiment la subtilité pour le moment, mais je vous écoute.



Vision simpliste des boules de Banach-Tarski (© Wikipedia)

T - Le volume, disons d'un corps solide dans l'espace est une notion plus complexe qu'il n'y paraît. Elle nous est habituelle. Les psychologues ont étudié comment la notion s'acquiert chez les enfants. Au début, ils sont portés à croire que si l'on éloigne un objet, son volume diminue, mais rapidement ils comprennent, pour le dire à la façon des mathématiciens, que le volume est invariant par déplacement. Un litre de lait reste un litre de lait, qu'il soit sur la table ou tout en haut sur l'étagère du supermarché. Tu as d'ailleurs implicitement utilisé toi-même cette invariance : les déplacements des morceaux de la partition ne changent pas le volume global.

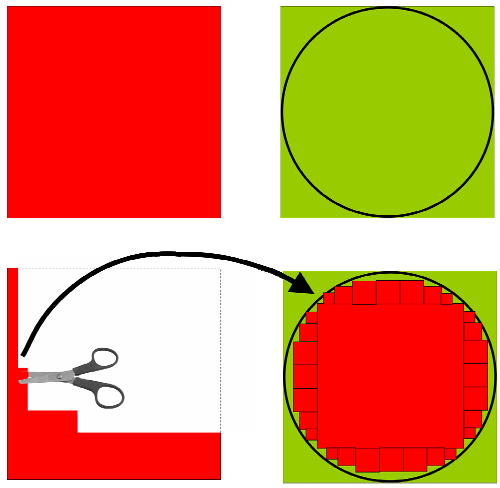
B - Il y a une autre propriété du volume qui est rapidement acquise par les enfants : on l'appelle la propriété d'additivité. En termes mathématiques, ça dit que le volume de deux parties disjointes est égal à la somme de leurs volumes respectifs. C'est là encore le principe dont tu t'es servi et qui permet de dire que le volume de deux boules identiques et disjointes est le double du volume d'une boule.

A - Donc vous me dites que mon objection est fondée !

T - Il faut d'abord réfléchir un peu à ce qu'est la géométrie. On pense qu'à l'origine, l'un des premiers problèmes abordés a été la mesure des terrains agricoles : les impôts étaient calculés à partir des surfaces de ces terrains, et donc il fallait les mesurer. Sans doute un certain pragmatisme, fournissant des "recettes de calcul" devait dominer. Ce sont les Grecs qui ont fait évoluer la géométrie. Ils ont commencé par préciser les notions et les propriétés de base, qu'Euclide a finalement présentées sous forme d'axiomes : ce sont des propriétés admises pour démarrer, avec un effort pour en mettre le moins possible, et à partir des axiomes, on doit *démontrer* les propriétés des figures, à l'aide d'une argumentation qui se veut rigoureuse. Mais en fixant les concepts de départ, les Grecs sont sortis du cadre empirique et de la référence au monde matériel. Les notions de point, droite, plan par exemple ne peuvent pas être considérées comme relevant du monde réel. Un point n'est pas une toute petite particule de matière, une droite n'est pas un fil tendu infini, etc. Platon a proposé dans l'allégorie de la caverne de ranger ces concepts mathématiques dans le monde des Idées. Au monde réel, le ressenti, au monde des Idées l'intelligible. Mais il y a un prix à payer : l'intuition première (même si elle reste utile) doit être critiquée dans le cadre d'une argumentation raisonnée pour énoncer des résultats valables, et inversement, il peut y avoir des démonstrations aboutissant à des résultats apparemment déroutants.

B - Ça nous éloigne un peu de notre problème. La difficulté commence quand on veut *définir* le volume d'une partie de l'espace. La difficulté est la même pour la notion d'aire (on préfère ce terme à celui de surface) d'une partie dans le plan. La notion d'aire est abordée dès l'école primaire, et on apprend progressivement à calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle. Les choses sérieuses commencent avec l'aire d'un cercle. C'est là qu'intervient le nombre π, puisque, si tu te souviens un peu de tes formules, l'aire est "π fois le rayon au carré".

A - J'ai toujours trouvé ce nombre π mystérieux ! Sans parler des horribles formules de trigonométrie !



Activité pédagogique sur le nombre π !
Remplissage du cercle par l'intérieur

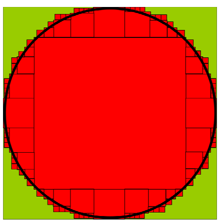
B - Je vais te raconter un souvenir d'enfance, tu verras qu'il permet de mettre le doigt sur la difficulté à définir la notion d'aire. Mon instituteur de l'époque distribuait à chaque élève une paire de ciseaux (à bouts arrondis pour la sécurité des élèves !) et deux feuilles de papier de même format carré, de mémoire 10 cm x 10 cm. L'une était de couleur rouge, l'autre de couleur verte. Sur cette dernière était tracé un cercle de 10 cm de diamètre, de sorte qu'il venait toucher les quatre bords de la feuille de papier. Le maître nous donnait alors les consignes de l'activité. Nous devions découper des carrés dans la feuille de couleur rouge, puis les coller dans le cercle, "attention **sans dépasser**, les enfants !", de manière à le recouvrir de rouge, le plus possible. De plus, lors du collage d'un nouveau carré rouge, il fallait qu'il ne morde pas sur les carrés déjà collés. On pouvait faire des carrés plus ou moins grands, les élèves se rendaient vite compte qu'au bout d'un certain temps, on était obligé de faire de tout petits carrés pour ne pas déborder et ne pas chevaucher ceux déjà collés. D'aucuns avançaient vite, d'autres traînaient un peu. En pédagogue expérimenté, l'instituteur savait donner le signal d'arrêt suffisamment tard pour que tous aient vraiment commencé le travail sans qu'aucun ne l'ait terminé, et pour cause ! Alors nous devions évaluer ce qui restait de papier rouge non utilisé. C'était le passage le plus délicat et le maître devait un peu suggérer les réponses. Le fait qu'il restait à peu près un quart de papier rouge non utilisé pour couvrir le disque circulaire nous apparaissait en tout cas assez crédible. Assez habilement, il expliquait que l'on ne pouvait pas couvrir toute la surface, mais qu'on n'en était pas très loin et il en concluait que l'aire du cercle était proche des trois-quarts de celle du carré. Dans la leçon suivante – là j'ai oublié les détails – il indiquait que l'aire du cercle était à peu près trois fois le carré du rayon du cercle, et il finissait par introduire le nombre π, dont il donnait l'approximation classique 3,14. Tu te souviens bien sûr de cette formule ?

A - Je ne me souviens pas que ce soit comme cela que la formule m'ait été présentée, c'était plutôt à apprendre par cœur.

[Il est remarquable que ces notions d'aire ou de volume ne sont jamais définies dans le parcours scolaire, et même les étudiants de mathématiques doivent attendre la fin de la licence pour avoir enfin une définition de ces notions. On apprend des formules, pour le volume d'un cube, d'une pyramide, d'une boule, mais sans avoir jamais défini la notion correspondante ! La raison en est… que ce n'est vraiment pas facile. Les mathématiciens qui s'y sont essayé sont nombreux. Pour n'en citer qu'un, c'est le mathématicien français Henri Lebesgue (1865-1941), qui a donné la méthode la plus satisfaisante pour ce genre de question, dans sa thèse "Intégrale, longueur, aire" soutenue à Nancy (cocorico !) en 1912. Les notions d'aire et de volume sont des cas particuliers de la théorie dite de la mesure de Lebesgue].

Henri LEBESGUE

B - Revenons à notre instituteur, car ce qu'il nous faisait faire donne une bonne approche de la façon dont on s'y prend pour définir l'aire d'une partie du plan. L'idée c'est d'approcher la partie "par l'intérieur". On admet la formule pour l'aire d'un carré, et par application du principe d'additivité, on sait donc calculer la surface d'une famille de carrés disjoints. L' "aire-à-définir" de la partie doit en tout cas être supérieure à l'aire de toute famille de carrés disjoints et contenus dans la partie. Il faut compléter cette approche "par l'intérieur" par une approche "par l'extérieur".



Remplissage du cercle par l'extérieur

Avec le même dispositif que précédemment pour le cas du cercle, la consigne donnée par l'instituteur serait cette fois-ci : recouvrir **entièrement** le disque circulaire, bord compris, avec des carrés rouges, toujours sans chevauchement, mais en débordant le moins possible.

T – Cette double approche, par l'intérieur et par l'extérieur, peut se faire pour une partie quelconque. L'approche par l'intérieur et l'approche par l'extérieur vont-elles coïncider ? Vont-elles nous fournir un unique nombre (qu'on appellera l'aire de la partie) qui soit plus grand que tous les résultats dans l'approche par l'intérieur et plus petit que les résultats dans l'approche par l'extérieur ? Là il faut vraiment travailler, et c'est pour cela que la définition de l'aire d'une partie est si longue à exposer. On dit qu'une partie est *mesurable* si les deux approches fournissent un même nombre. On décrit des conditions sur la partie, assez faciles à utiliser en pratique, pour qu'il en soit ainsi, et par exemple l'intérieur d'un cercle est une partie mesurable. Disons que tout ce qui est ''constructible''(notion qu'il faudrait bien sûr définir) est mesurable. On démontre par ailleurs qu'il existe des parties non mesurables. Pour ces dernières, on **ne peut pas** définir leur aire. Pour la notion de volume, il faut utiliser des familles de cubes disjoints, avec le même approche "par l'intérieur" et "par l'extérieur". On montre facilement qu'une boule est mesurable, plus généralement tous les objets "constructibles" sont mesurables, mais là aussi on démontre qu'il existe des parties non-mesurables, dont on **ne peut pas** définir le volume.

B - Maintenant tu peux deviner ce qui se passe : je t'ai indiqué que nous ne fournissions pas de recette de découpage pour les parties de la boule, et...

A - Les parties de votre paradoxe ne sont pas mesurables! Donc pas possible de parler de leur volume, et mon objection tombe !

[Si on essaye de penser ces parties comme des objets matériels, le résultat Banach et Tarski est contraire à l'intuition, c'est la démonstration (malheureusement difficile) qui seule établit ce résultat. On ne peut pas ''découper'' ces parties avec des outils, même avec une imprimante 3D du futur ! Donc aucune chance de se servir du paradoxe pour ouvrir une start-up qui proposerait deux petits pains (voire plus) pour le prix d'un seul !]

Référence

[1] Stefan Banach and Alfred Tarski. *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta Mathematicae, 6(1):244–277, 1924.