Petits casse-têtes :
Énoncés et Solutions

Christian FONTEIX, Professeur Émérite
Louis SCHUFFENECKER, Ancien Président de l'INPL

12 06 2020

Les dés et les 3 mathématiciens

Énoncé de l'énigme

Trois mathématiciens de renom (**Bob**, **Marc** et **Yvon**) sont invités à une soirée. A un moment, pour amuser ses convives, l'hôtesse les fait sortir de la pièce. Elle demande alors à deux personnes de lancer chacun deux dés. Pour ces deux lancers, la somme des dés donne deux nombres, [N1 ; N2], évidemment compris entre 2 et 12.

L'hôtesse fait alors rentrer les 3 mathématiciens. Elle souffle à l'oreille de **Bob** le produit des deux nombres, sans que Marc et Yvon ne puissent l'entendre. Elle souffle ensuite à l'oreille de **Marc** la somme des deux nombres sans que **Bob** et **Yvon** ne puissent l'entendre. Quant à **Yvon**, elle ne lui dit rien. Finalement elle demande à tous les trois de trouver les deux nombres en discutant entre eux à voix haute, mais sans jamais donner d'indication chiffrée.

Le dialogue se déroule ainsi :

Bob : "Je connais le produit des deux nombres, mais je ne trouve aucun des deux nombres"

Marc : "Je connais la somme des deux nombres, mais je ne trouve aucun des deux nombres"

Yvon : "Je ne trouve aucun des deux nombres"

Bob : "J'ai trouvé les deux nombres !"

Marc : "J'ai trouvé les deux nombres !"

Yvon : "J'hésite entre 2 possibilités. Mais comme l'une est beaucoup plus probable que l'autre, je pense avoir trouvé les deux nombres".

Quels sont les deux nombres [N1 ; N2] ?

Solution de l'énigme

Méthode de résolution n°1

Nous sommes dans la peau des convives.

L'ordre des deux nombres importe peu. Nous devons donc éliminer les doublons.
Par convention, le premier sera le plus petit des 2.
Il y a donc 12 x 11 / 2 = 66 couples de nombres.

Bob connaît le produit des deux nombres, mais pas les deux nombres. Il est donc en indétermination entre 24 cas : [2 ; 6] [2 ; 8] [2 ; 9] [2 ; 10] [2 ; 12] [3 ; 4] [3; 6] [3 ; 8] [3 ; 10] [3 ; 12] [4 ; 4] [4 ; 5] [4 ; 6] [4 ; 9] [4 ; 10] [4 ; 12] [5 ; 6] [5 ; 8] [5 ; 12] [6 ; 6] [6 ; 8] [6 ; 10] [6 ; 12] et [8 ; 9].

Marc sait que **Bob** est en indétermination, et il connaît la somme des deux nombres, mais pas les deux nombres. Il est donc en indétermination dans le domaine d'indétermination de **Bob**, et peut donc éliminer les couples [3 ; 4] [3 ; 12] et [6 ; 12] de la liste précédente.

Yvon ne peut pas lever l'indétermination précédente.

Bob n'est plus en indétermination : il peut choisir entre [2 ; 6] et [8 ; 9] car il connaît le produit.

Marc n'est plus en indétermination : il peut choisir entre [2 ; 6] et [8 ; 9] car il connaît la somme.

Yvon ne peut pas choisir entre [2 ; 6] et [8 ; 9], mais il connaît la probabilité *p* d'obtenir *n* avec 2 dés :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	1	1	2	2	3	3	3	2	2	1	1

La probabilité d'obtenir un couple est proportionnelle au produit des chiffres de la ligne inférieure. Le couple [2 ; 6] donne 1 x 3 = 3 et le couple [8 ; 9] donne 3 x 2 = 6. Ainsi le couple [8 ; 9] est 2 fois plus probable que [2 ; 6].

Yvon propose donc [**8 ; 9**].

Méthode de résolution n° 2

CLIQUEZ ICI pour télécharger la feuille Excel visualisant la résolution de l'énigme

Les timbres-poste Européens

Énoncé de l'énigme

L'Union Européenne envisage d'unifier l'affranchissement des lettres et des petits paquets envoyés depuis tous les pays de la zone Euro.
Les tarifs postaux sont fixés de 1 à 36 € en fonction du pays destinataire et du poids de l'envoi :

	0 g 20 g	20 g 50 g	50 g 100 g	100 g 200 g	200 g 500 g	500 g 1 kg
Europe	1 €	7 €	13 €	19 €	25 €	31 €
Afrique	2 €	8 €	14 €	20 €	26 €	32 €
Amérique	3 €	9 €	15 €	21 €	27 €	33 €
Asie	4 €	10 €	16 €	22 €	28 €	34 €
Océanie	5 €	11 €	17 €	23 €	29 €	35 €
Antarctique	6 €	12€	18 €	24 €	30 €	36 €

Pour simplifier le système, l'UE souhaite **imprimer seulement 5 timbres**, dont les valeurs faciales (en €) seront : [N1 ; N2 ; N3 ; N4 ; N5].

Règle supplémentaire : Pour les envois de tous poids et toutes destinations, les usagers ont le droit de **coller au maximum 3 timbres** sur la lettre (ou le paquet) en utilisant des timbres imprimés par l'UE.

Quels sont les valeurs [N1 ; N2 ; N3 ; N4 ; N5] en € satisfaisant ces conditions ?

Solution de l'énigme

Il est conseillé d'utiliser un tableur (pour le confort).
Il faut combiner des nombres entiers, pairs (P) et/ou impairs (I). (P + P) est un nombre Pair ; (I + I) est un nombre Pair ; (P +I) est un nombre Impair.
Le timbre à 1€ (N1) est incontournable
Il reste 4 valeurs à déterminer [N2 ; N3 ; N4 ; N5], par ordre croissant.

1ère étape : Examen de la grille de départ :

On commence par tester les combinaisons binaires
[1 ; 2]   [1 ; 3]   [1 ; 4]   [1 ; 5] ; etc…

1	1	0	0	1
2	2	0	0	2
3	2	1	0	3
4	2	2	0	4
5	2	2	1	5
6	2	2	2	6
7	7	0	0	7
8				0
9				0

1	1	0	0	1
2	2	0	0	2
3	3	0	0	3
4	3	1	0	4
5	3	1	1	5
6	3	3	0	6
7	3	3	1	7
8	8	0	0	8
9				0

1	1	0	0	1
2	1	1	0	2
3	1	1	1	3
4	4	0	0	4
5	4	1	0	5
6	4	1	1	6
7	7	0	0	7
8				0
9				0

1	1	0	0	1
2	1	1	0	2
3	1	1	1	3
4				0
5	5	0	0	5
6				0
7				0
8				0
9				0

Les zones bleues marquent les limites de couverture des différents couples [N1 ; N2]. Le couple [1 ; 5] ne permet pas l'affranchissement à 4 €. Il est donc mis hors-jeu.
(Idem pour les couples suivants).
Il n'existe que 3 couples éligibles pour la suite.
Il faut donc leur adjoindre une valeur N3 pour continuer l'investigation.
[1 ; 2 ; N3] [1 ; 3 ; N3] [1 ; 4 ; N3]
Le choix de la valeur faciale N3 reste ouvert.

Cette première exploration fournit une information importante : À chacun des 3 couples éligibles correspond une valeur maximale $N3_{max}$

Couple	$N3_{min}$	$N3_{max}$
[1 ; 2]	3	7
[1 ; 3]	4	8
[1 ; 4]	5	7

Attention : $N3_{max}$ n'est pas forcément la bonne réponse au défi…

2ème étape : Examen de la grille d'arrivée :

Il s'agit d'analyser les conditions pour atteindre les affranchissements correspondant aux valeurs extrêmes : 36 €, 35 €…
Il faut travailler avec des combinaisons [TX ; N4 ; N5], TX étant une des valeurs N1, N2 ou N3.
On commence avec TX = N3 (nombre pair ou impair).
À chaque valeur fixée de TX on associe la somme SX, définie par SX = S - TX . Il existe trois combinaisons pour configurer SX : SX = (N5 + N5) ; SX = (N4 + N5) et SX = (N4 + N4). Les tableaux ci-dessous illustrent les 2 possibilités pour enclencher les combinaisons :

S	TX	SX = S - TX	SX
36	PAIR	PAIR	N5 + N5
35	PAIR	IMPAIR	N4 + N5
34	PAIR	PAIR	N4 + N4
33	PAIR	IMPAIR	???

S	TX	SX = S - TX	SX
36	IMPAIR	IMPAIR	N4 + N5
35	IMPAIR	PAIR	N4 + N4
34	IMPAIR	IMPAIR	???
33	IMPAIR	PAIR	

L'examen de ces tableaux met en évidence une contrainte majeure : N5 = N4 + 1 , Ce qui signifie aussi que N4 et N5 sont de parité différente.
La première ligne de chaque tableau permet de déterminer les valeurs de N4 et N5 pour chacune des valeurs choisies de TX, c'est à dire N3.
Les valeurs marquées par "???" correspondent à la somme impaire (N4 + N5 - 2).
La ligne (???) ne peut être complétée que par le remplacement de TX = N3 par TX = N2, à la condition choisir N2 = N3 - 2.
À chaque couple [N1 ; N2] sélectionné, il faut associer la valeur N3 = N2 + 2

Conclusion

L'étape 1 a permis de limiter le champ des "possibles" à trois jeux de valeurs [N1 ; N2].
L'étape 2 a permis de découvrir la clef à appliquer : N5 = N4 + 1 et N3 = N2 + 2

Il ne reste donc plus qu'à tester les trois hypothèses pour [N1 ; N2 ; N3] :
[1 ; 2 ; 4]   [1 ; 3 ; 5]   [1 ; 4 ; 6]

Le résultat est donc **[1 ; 4 ; 6 ; 14 ; 15] en €**