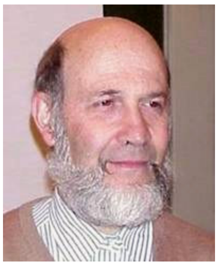


Histoire d'une découverte inattendue

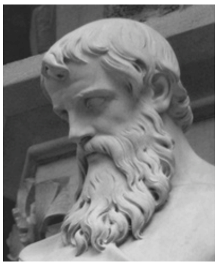
Maurice MARGENSTERN

Professeur Émérite

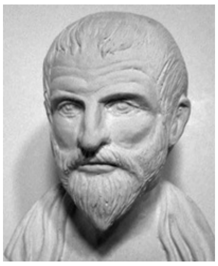
15 02 2021

Dans l'Antiquité

On ne sait pas très bien sur quelle rive de la Méditerranée est née la géométrie euclidienne, celle que nous avons tous appris de l'école primaire au lycée. Cette géométrie nous vient des *Éléments.* Le philosophe Proclus (412-485) l'attribue à Euclide (ca. 320 - 260), environ sept cents ans plus tôt. Dans cet ouvrage, Euclide énonce des axiomes qui lui paraissent plus ou moins aller de soi et, à partir de là, démontre des théorèmes. Pendant de nombreux siècles, *les Éléments* ont servi de référence au monde mathématique. Ils ont aussi fixé la forme que devaient prendre les traités mathématiques, ce qui a perduré jusqu'ici.



EUCLIDE



PROCLUS

Ces statues sont des vues d'artiste sans ressemblance nécessaire avec les personnages représentés

Dans les *Éléments*, quelques axiomes concernent la géométrie plane et l'un d'eux, dit le cinquième dans la liste établie par Euclide, est énoncé sous une forme qui a suscité des commentaires jusqu'à notre époque. Voici cet axiome que je désignerai par *E* dans tout ce qui suit :

Si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Vous n'avez probablement jamais vu cet énoncé. Ce que vous avez appris à l'école est l'énoncé suivant que je noterai *P* :

Par un point du plan pris hors d'une droite, il passe dans ce plan exactement une parallèle à cette droite.

Cet énoncé *P* est dû à Playfair (1748-1819), un mathématicien anglais. En mathématiques, on dit que *E* et *P* sont des énoncés équivalents : à partir de l'un, on peut démontrer l'autre. L'énoncé *P* nous paraît évident. Cependant, historiquement, c'est *E* qui a intrigué les mathématiciens pendant près de deux mille ans. En effet, l'étrange formulation ressemblait à un théorème mais Euclide semblait affirmer que tel n'était pas le cas.

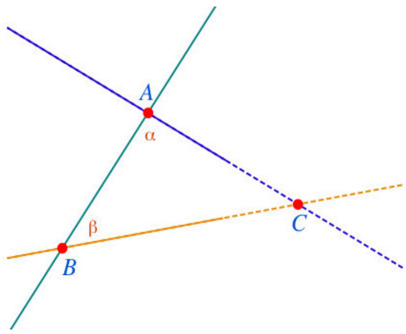


Figure 1. *Ce que dit l'axiome d'Euclide*

La figure 1 représente ce que dit *E*. Soient α et β les angles en respectivement *A* et *B* formés par les droites *AC* et *BC* avec la droite *AB*. L'axiome *E* dit que si $\alpha + \beta$ est plus petit que deux droits, les deux droites se coupent en *C* à distance finie.

La longue errance

Proclus remarque qu'Euclide démontrait la réciproque de *E,* à savoir que dans un triangle, la somme de deux angles est plus petite que deux droits. Proclus en déduisait fautivement que *E* devait être un théorème et non un axiome. Proclus chercha à démontrer *E* mais son raisonnement est fautif.

Sans entrer dans la démonstration, remarquons que Proclus supposait un énoncé *S* qui lui semblait aller de soi et, grâce à *S*, il démontrait *E*. En fait *S* est équivalent à *E*. Ce type de raisonnement sera repris par tous ceux qui voudront prouver *E* jusqu'à la fin du XVI^{ème} siècle. À chaque fois apparaît une nouvelle propriété équivalente à *E* sans que celui qui cherche à le prouver se rende compte de cette équivalence.

On pourrait penser qu'on tourne en rond au cours des siècles, et qu'aucun progrès ne se profile. Ce n'est pas vrai pour nous, qui savons la fin de l'histoire. En fait, cette succession de propriétés équivalentes à *E* donnera lieu à d'utiles comparaisons plus tard, nous y reviendrons.

Ce long cheminement vers la vérité va se prolonger pendant plus de 1 500 ans, jusqu'au XVII^{ème} siècle où quelque chose de nouveau va se produire.

Les précurseurs

Deux mathématiciens ont abordé la question sous un autre angle. Avant de les présenter, indiquons les figures d'où ils sont partis.

Sur la figure 2, nous voyons deux quadrilatères : ABCD et ABEF. Le premier a trois angles droits qui sont en B, C et D, c'est un quadrilatère de Lambert. Le second a deux angles droits qui sont en B et E. Ces angles droits ont un côté commun et leurs autres côtés sont égaux et opposés. C'est un quadrilatère de Saccheri. Comme le montre la figure, un quadrilatère de Lambert est la moitié d'un quadrilatère de Saccheri. Inversement, un quadrilatère de Saccheri peut être décomposé en deux quadrilatères de Lambert égaux.

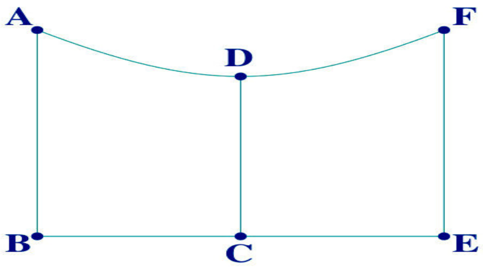
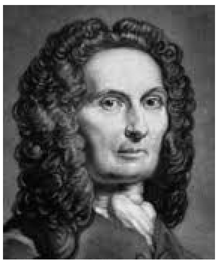


Figure 2. *ABCD, le quadrilatère de Lambert ;*
ABEF, le quadrilatère de Saccheri.

L'hypothèse *E* est vraie si les angles en *A* et *F* sont droits et réciproquement : les deux quadrilatères sont alors des rectangles. La nouveauté est que ces deux mathématiciens supposent que *E* n'est pas vrai. Ils éliminent assez facilement que l'angle en *A* soit obtus. Ils supposent donc que *A* est aigu, ils l'appellent l'*hypothèse de l'angle aigu*. Si, partant de cette hypothèse, ils arrivent à une contradiction, nécessairement *A* est droit et donc *E* est vrai.



Giovanni G. SACCHERI *Johann H. LAMBERT*

Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) est le premier de ces deux mathématiciens. C'est un prêtre jésuite qui enseigna d'abord la philosophie à Turin à partir de 1694. Après 1697, cette fois à Pavie, son enseignement incluait aussi la théologie. Après 1699, jusqu'à sa mort, il ajouta les mathématiques à son enseignement. Saccheri suivit le chemin caractérisé plus haut : raisonner par l'absurde en supposant l'hypothèses de l'angle aigu. Pendant plus de vingt ans, Saccheri accumula les propriétés, il n'obtient pas de contradiction. Il finit par faire un raisonnement très alambiqué et faux qui aboutit à la contradiction tant espérée. Il n'était pas complètement dupe mais n'en finit pas moins par considérer que, décidément, cette hypothèse de l'angle aigu ne pouvait qu'être fausse.
Considérons maintenant Johan Heinrich Lambert (1728-1777), mathématicien allemand. Il suivit le chemin de Saccheri dont apparemment il ne connaissait pas les travaux tout en allant un peu plus loin que son prédécesseur. Mais là encore, il fut au désespoir de ne pas rencontrer de contradiction.
Il trouva même un résultat parfaitement exact dont il dira qu'il était contraire à la nature de la droite. La *nature* de la droite ! Voilà un aveu intéressant. Pour Lambert comme pour Saccheri, aucun doute dans leur esprit : avec ses *Éléments*, Euclide nous a donné ***la*** géométrie. Il ne peut y en avoir d'autre.

Arrêtons nous un instant à la fin du XVIII^{ème} siècle. À cette époque, les mathématiciens étaient majoritairement convaincus qu'il était impossible de démontrer *E* en s'appuyant sur les autres axiomes et que l'on avait perdu trop de temps à essayer de le faire sans succès. Cependant, plusieurs ont encore cherché à prouver *E*, après le moment où il fût établi que ce n'était pas possible.

Nikolaï I. LOBATCHEVSKI *Karl F. GAUSS*

La découverte

Deux mathématiciens ont mis fin à cette quête bimillénaire. Un Russe, Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) et un Hongrois, Janos Bolyai (1802-1860). Ils découvrirent d'une nouvelle géométrie presque en même temps, sans se connaître.

Lobatchevski, alors jeune enseignant à l'Université de Kazan fit, en 1826, un exposé en français où il définissait la nouvelle géométrie. Son texte s'est perdu. Il se heurta à la vive opposition d'Ostrogradski, membre de l'Académie des Sciences de Russie, et ne parvint pas à publier ses travaux en Russie. Devenu recteur de l'Université de Kazan en 1827, il acquit une position qui lui permit de faire éditer en 1840 un livre en allemand sur sa découverte, traduit plus tard en français sous le titre *la Théorie des parallèles.* Il en envoya un exemplaire à Gauss, illustre mathématicien, un des plus grands de l'histoire des mathématiques, sur lequel nous reviendrons. En 1842, Gauss fit admettre

Lobatchevski à son Académie de Göttingen sans en donner la raison aux membres de la dite académie. En 1855, Gauss décida de lui envoyer une médaille, laquelle n'arrivât qu'en 1856, à la veuve du savant. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) fut surnommé *prince des mathématiques*. En 1829, il écrivit à un ami qu'il n'était pas près de faire connaître ses études sur les fondements de la géométrie car, comme il lui confia : *je redoute les hauts cris des béotiens si jamais j'exprimais mes vues complètement*.

J'avais anticipé sur Gauss en racontant la contribution de Lobatchevski. Abordons l'autre découvreur, nous retrouverons Gauss à nouveau.


János BOLYAI *Farkas BOLYAI*
Le portrait de gauche est une vue d'artiste, il n'est resté aucun portrait de János Bolyai.

János Bolyai (1802-1860) est le fils de Farkas Bolyai (1775-1856) un mathématicien de modeste envergure qui tenta, sans succès, de démontrer *E* lui aussi. Fin 1823, János envoya une lettre enthousiaste à son père, lui déclarant qu'il avait découvert un monde merveilleux. Son père l'avait pourtant découragé d'entreprendre de démontrer *E*. Finalement, en 1825, János exposa sa théorie à son père qui ne la comprit pas. Le jeune homme essaya une autre démarche pour tenter de publier son résultat, mais sans succès.

En 1831, il exposa de nouveau à son père ce qu'il avait trouvé. Cette fois, Farkas comprit et lui conseilla de publier ses résultats car, lui dit-il : *beaucoup de choses ont leur époque à laquelle elles sont trouvées au même moment en plusieurs endroits, comme violettes au printemps fleurissent un peu partout*. János suivit son conseil et publia son travail sous forme d'*Appendice* en latin à un ouvrage de Farkas publié en 1831. Farkas, qui avait fait ses études au côté de Gauss, envoya le livre au déjà célèbre mathématicien, lui recommandant le travail de son fils.

Gauss répondit en 1832 qu'il avait déjà pensé à des choses semblables, et qu'il ne pouvait louer János sans se louer lui-même. Il se réjouit que la primeur de la publication lui soit ravie par le fils d'un ami. János fut dévasté par cette réponse. Il attendait de Gauss une recommandation pour être publié dans un journal prestigieux et non une reconnaissance du bout des lèvres après avoir revendiqué l'antériorité.

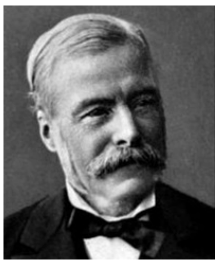
Dès lors, János se mura dans l'isolement. Il consacra le reste de sa vie à des recherches mathématiques qui lui firent écrire 14 000 pages sans aucune publication. Ces documents contiennent de nombreux résultats, d'algèbre notamment, qui ne furent retrouvés qu'au cours du XIX^{ème} siècle.

Bien plus tard, les manuscrits de Gauss ont montré que l'illustre mathématicien n'avait écrit qu'une vingtaine de pages sur la géométrie hyperbolique, établissant en tout et pour tout une propriété sur les parallèles dans ce nouveau contexte.

De leur côté, Lobatchevski et Bolyai ont établi un grand nombre de propriétés. Ils n'ont pas trouvé de modèle de leur géométrie dans la géométrie euclidienne, bien que Lobatchevski ait recherché un tel résultat. Leur œuvre a apporté un éclairage déterminant sur les pérégrinations des prédécesseurs de Saccheri. Toutes les propriétés qui s'étaient avérées équivalentes à *E* en géométrie euclidienne ne le sont plus en géométrie hyperbolique. Un seul exemple : en géométrie euclidienne, deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont à distance constante l'une de l'autre ; en géométrie hyperbolique, deux droites parallèles tendent l'une vers l'autre vers l'infini. Par ailleurs, l'ensemble des points qui sont à égale distance d'une droite ne forme pas une droite en géométrie hyperbolique.

La reconnaissance

La publication de la correspondance de Gauss dans la seconde moitié du XIX^{ème} siècle permit de sortir de l'ombre les noms de Lobatchevski et Bolyai. Deux mathématiciens français furent les artisans de la reconnaissance de la géométrie hyperbolique : Guillaume-Jules Houël (1823-1886) et Henri Poincaré (1854-1912).

Henri POINCARÉ *Guillaume-Jules HOUËL*


Eugenio BELTRAMI *Felix Christian KLEIN*

Le premier retrouva le petit livre publié par Lobatchevski en 1840 et le traduisit en français sous le titre de *Théorie des parallèles*. La traduction en 1866 par Houël de ce chef d'oeuvre de clarté fit connaître la géométrie hyperbolique dans toute l'Europe. La traduction en anglais parut aux États-unis en 1914.

Eugenio Beltrami (1835-1900), mathématicien italien, fut le premier en 1868 à trouver un modèle du plan hyperbolique en géométrie euclidienne. Un peu plus tard, Felix Christian Klein (1849-1925) trouva en 1872 un autre modèle, dans le plan euclidien cette fois. En 1882, Poincaré définit deux modèles du plan hyperbolique dans le plan euclidien : le demi-plan de Poincaré et le disque de Poincaré. Ces deux modèles sont les plus utilisés aujourd'hui, celui de Klein l'étant aussi dans quelques problèmes. Les mathématiciens préfèrent le demi-plan de Poincaré. Personnellement je préfère le disque de Poincaré qu'il faut voir comme le hublot d'un appareil survolant ce monde si peu familier.

Lobatchevski qualifia d'*imaginaire* cette géométrie qu'il découvrit. Gauss l'appela non-euclidienne. Poincaré l'appela géométrie de Lobatchevski puis de Lobatchevski-Bolyai. Le terme de géométrie *hyperbolique* est dû à Riemann (1826-1866) qui trouva également la géométrie *elliptique*, celle du cas de l'angle obtus. Riemann unifia les trois géométries qui apparurent ainsi comme les trois branches d'un même arbre.

Réflexions

Pourquoi la découverte se produisit-elle si tard ? Quelle fut sa portée ? La première question conduit à une troisième : quelle est la place du scientifique dans la société ?

Pourquoi tant d'errance ? On était convaincu jusqu'au XVII$^{\text{ème}}$ siècle qu'il n'y avait qu'une seule géométrie, celle des *Éléments* d'Euclide, qui surplombait le monde mathématique depuis plus de deux mille ans. Saccheri, qui était prêtre, était tout particulièrement soumis à l'autorité de la tradition. Lambert, quant à lui, par son exclamation sur la nature d'une droite, faisait preuve du même respect, de sorte qu'une autre géométrie ne pouvait pas lui venir à l'esprit.

Pourquoi Lobatchevski et Bolyai ont-ils pu s'affranchir du poids de la tradition ? Cinquante ans séparent la mort de Lambert de la découverte de la géométrie hyperbolique. Entre ces deux événements, un troisième explique sans doute ce changement d'esprit : la Révolution française. En brisant la monarchie de droit divin, cette révolution produisit sur le plan des idées une vague qui submergea toute l'Europe. Contrairement à aujourd'hui, un tel raz-de-marée des idées ne pouvait pas se répandre en quelques jours, voire en quelques semaines. Gauss en témoigne qui fut paralysé par la crainte des hauts cris des béotiens.
Il vivait dans un temps où il était encore trop tôt pour affirmer une pensée radicalement différente. À cette époque, Kant pronostiqua que l'esprit humain finirait par trouver la démonstration de *E*.

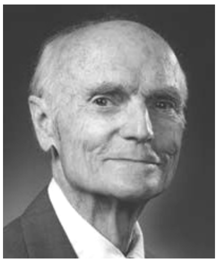
La vague des idées révolutionnaires secoua toute l'Europe et parvint jusqu'en Russie. En décembre 1825, à un moment où Lobatchevski enseignait déjà à l'Université de Kazan, une révolution tenta d'abattre le tsar, mais échoua et fut durement réprimée par Nicolas 1$^{\text{er}}$. Ces événements furent aussi ressentis à Kazan.

Quelle fut la portée de cette découverte ? Les modèles ont démontré que si la géométrie hyperbolique était contradictoire, la géométrie euclidienne le serait aussi. Donc la légitimité de la nouvelle géométrie était solidement établie. Du coup, on se trouvait dans une situation inédite en mathématique. On était face à *E* pour lequel on pouvait librement choisir. Si on considérait que *E* était vrai, on se retrouve en géométrie euclidienne, soit on considère que *E* est faux , et deux possibilités s'offrent alors, la géométrie hyperbolique, le cas de l'angle aigu, ou la géométrie elliptique, le cas de l'angle obtus. Ainsi une nouveauté fondamentale apparut : la notion d'axiome indépendant. Un coup sévère à la pensée unique en matière de science mais pas seulement. La découverte contribua certainement au développement de la logique mathématique qui avait commencé dans la première moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et qui fut renforcé par les travaux d'arithmétisation de l'analyse.

Il y a une filiation logique entre la connaissance de cette découverte et la découverte des paradoxes de la théorie des ensembles de Cantor (1845-1918). On aborde ainsi la crise des fondements qui secoua le monde mathématique au tournant du siècle. Ceci est une autre histoire qui prolonge celle qui se termine ici.

De ce que j'ai dit pour expliquer le moment de la découverte, ce changement d'esprit radical entre les précurseurs et les découvreurs, on peut s'interroger sur le poids de la société sur ses savants. Ce poids est-il le même sur les scientifiques d'aujourd'hui ? Il me semble que oui.

Avant Lambert, les mathématiciens appartenaient pour la plupart aux milieux les plus aisés de la société. Saccheri n'était certainement pas riche, il n'en demeurait pas moins un privilégié. A partir de Lambert, on voit des hommes issus de milieux modestes, repérés dans leur enfance par des maîtres d'école, aiguillés vers des emplois où ils peuvent consacrer du temps à leurs recherches et où on peut les remarquer, ce qui leur permet de trouver l'appui d'un prince ou d'un État qui leur assure une situation stable. Le parcours personnel des scientifiques d'aujourd'hui s'inscrit dans un schéma un peu plus simple, l'école primaire et secondaire simplifiant l'accès à l'université. Ce milieu scolaire, pour autant qu'il soit un monde à lui seul, baigne cependant dans la société et aucun acteur de ce milieu n'échappe aux idées du moment. Aujourd'hui, avec le poids des médias et de l'Internet qui se superposent aux enseignements dispensés par l'école, cette emprise de la société sur les scientifiques est plus forte, je pense, qu'au temps évoqués dans cette histoire. Sans parler des impératifs économiques imposés à la recherche scientifique par l'encouragement à rechercher des financements venant des entreprises. Encouragement est un doux euphémisme : il s'accompagne d'une baisse des crédits de l'État.



Harold COXETER

Retour à Euclide

Harold Coxeter (1907-2003), un des plus grands géomètres du XX^ème^ siècle a écrit, à propos de *E* : *La réticence d'Euclide à l'introduire est un argument pour le qualifier de premier géomètre non-euclidien.*

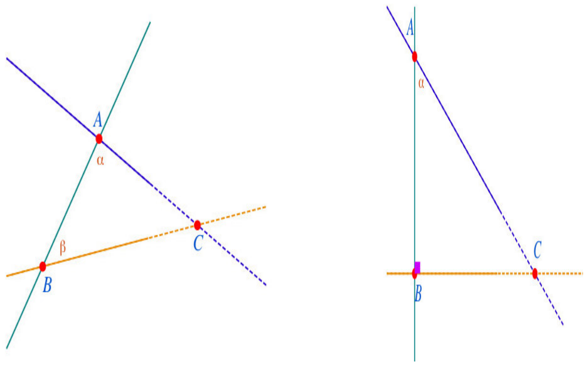


Figure 3. *A gauche, la figure 1. A droite, un redressement de cette figure : BC horizontale et AB verticale.*

La figure 3 illustre une opération qui permet de comprendre le jugement de Coxeter. On reprend la figure 1 qui illustre *E* en plaçant *BC* sur une horizontale et en mettant *AB* à angle droit avec *BC*. La condition exprimée par *E* devient alors : si l'angle en *A* est aigu, la droite oblique coupée par *AB* va couper la droite *BC* en un point *C* à distance finie.

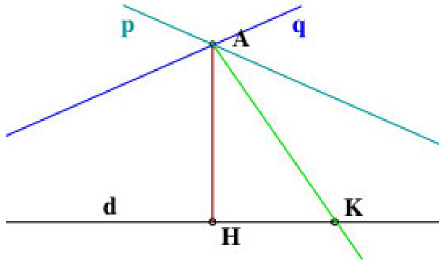


Figure 4. *La figure dont est parti Lobatchevski.*

On voit que la partie droite de la figure 3 ressemble à la moitié de la figure 4. On trouve cette figure chez Saccheri et elle a été reprise par Lobatchevski qui ignorait l'œuvre de Saccheri. Sur cette figure, si on fait tendre *K* vers l'infini, la droite *AK* tend vers la droite ***p***. L'angle que fait ***p*** avec *AH* est soit droit, soit obtus, soit aigu. Lobatchevski choisit le cas de l'angle aigu. Il ne constate pas de contradiction. Il en conclut qu'une nouvelle géométrie existe à côté de la géométrie euclidienne.

Probablement, Euclide n'a pas conclu à la possibilité de l'angle aigu. Il est raisonnable de penser qu'il a vu qu'un choix existait. Il a choisi celui qui lui paraissait le plus simple, celui qui était conforme à l'architecture de son temps. Le poids de l'époque, déjà. Euclide a sans doute choisi la figure 1 pour définir l'axiome *E* par souci de généralité. Peut-être aussi parce qu'il avait en vue la réciproque qui concerne tous les triangles, pas seulement ceux qui sont rectangles.

J'espère que ce voyage dans le temps vous aura intéressé et vous aura montré l'intérêt, pour la connaissance, du monde qui a été découvert et dont je vous parlé dans mon article précédent.

NB : Les portraits, images ou photos, viennent de Wikipédia. Les figures géométriques sont de mon crû.